Wolfgang Hönig / Andreas Ecke / Maik Globisch

Probeklausur „Algorithmen und Datenstrukturen“
Januar/Februar 2010
Studiengang: Dipl.-Informatik, Erg.studium Softwaretechnik, Informationssystemtechnik, Dipl.-Medieninformatik, Dipl.-Mathematik

1. Aufgabe (AVL-Baum): (5 Punkte)

Fügen Sie in einen anfangs leeren AVL–Baum die folgenden Schlüssel ein:
18, 1, 16, 13, 10, 5, 2.
Wenden Sie hierbei konsequent den Einfüge–/Balancierungsalgorithmus an, und dokumentieren Sie die ausgeführten Operationen.
Nutzen Sie die Abkürzungen:
i(x) - für das Einfügen des Knotens mit dem Schlüsselwert x,
L(x) - für die Linksrotation um den Knoten mit dem Schlüsselwert x,
R(x) - für die Rechtsrotation um den Knoten mit dem Schlüsselwert x.

2. Aufgabe (Prozedurkonzept - pulsierender Speicher): (2 + 4 = 6 Punkte)

Gegeben sei das folgende *C*-Programm:

```c
#include <stdio.h>
int e;

void g(int y, int z, int *x);

void f(int y, int *z) {
  int u; /* label1 */
  if (y > 1) {
    f(y - 1, &u); /* $2 */ /* label2 */
    g(y - 1, u, z); /* $3 */ /* label3 */
  }
  else *z = 4;
}

void h(int *x) {
 int u; /* label8 */
 f(*x-1,x); /* $5 */ /* label9 */
}

void g(int y, int z, int *x) {
  int u; /* label4 */
  if (y > 1) {
    f(y - 1, &u); /* $4 */ /* label5 */
    h(x); /* $6 */ /* label10 */
    *x = u + z;
  }
  else *x = 5;
}

int main() {
  int a;
  scanf("%i", &e); /* label6 */
  f(e, &a); /* $1 */ /* label7 */
  printf("%d", a);
  return 0;
}
```

(a) Geben Sie den Gültigkeitsbereich jedes Objektes des Programmes an. Nutzen Sie dazu die angegebenen Zeilennummern.

(b) Stellen Sie die Rechnung des Programmes für die Eingabe `e = 2` als pulsierenden Speicher dar, wobei die aktuelle Situation bei jedem Passieren der Marken `label1` bis `label10` dokumentiert werden soll. Führen Sie des weiteren auch ein Rücksprungmarkenprotokoll.
Hat eine Variable noch keinen Wert durch eine Zuweisung erhalten, so geben Sie anstelle des Wertes ein ? an (also z. B. x = ?, wenn x zum Zeitpunkt der aktuellen Marke noch unbelegt ist). Beachten Sie weiter: `$1` bis `$6` sind die bereits festgelegten Rücksprungmarken.

3. Aufgabe (Funktionen u. dyn. Datenstrukturen in *C*): (1 + 3 + 2 = 6 Punkte)

(a) Geben Sie eine für die Speicherung von AVL-Bäumen geeignete Datenstruktur an. Benutzen Sie diese dann auch zur Lösung der Aufgabenteile (b) und (c).

(b) Schreiben Sie in *C* eine Funktion `balance(...)`, die an jedem Knoten eines beliebigen AVL-Baums des Typs aus (a) in das Knotenmerkmal für die Balance die Balancewerte einträgt.
Geben Sie einen Aufruf ihrer Funktion an!

(c) Schreiben Sie in *C* eine Funktion `tree_to_liste(...)`, die eine absteigend geordnete Liste der Schlüsselwerte, die in dem AVL-Baum (des Typs aus (a)) auftreten, erzeugt. Geben Sie außerdem die notwendigen weiteren Deklarationen sowie einen Aufruf ihrer Funktion an.

Hinweis: Sie können eine Funktion `void append(LPtr *l, int n)` entsprechend des Vorlesungsskriptes voraussetzen!

4. Aufgabe (Rekursion und Iteration): (3 + 2 = 5 Punkte)

Die Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ und $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ seien definiert durch:

$$
\begin{aligned}
&f(0) = 2,\ f(1) = 3,\ h(0) = 1,\ h(1) = 2,\ l(0) = 0\\
&f(n+1) = l(n+1) - 2 \cdot h(n+1) + f(n-1),\ \ n \geq 1\\
&h(n+1) = 3 \cdot h(n) - 2 \cdot f(n-1) + h(n-1),\ \ n \geq 1\\
&l(n+1) = l(n) + 1,\ n \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Schreiben Sie das iterative Verfahren *iter* zur Berechnung von $f(n)$ auf.

(b) Gegeben sei das iterative Verfahren *iterg* zur Berechnung der Funktion $g(n)$:

$$
\begin{aligned}
g(n) &= \underline{iterg}(n, 1, 2),\ n \geq 1, \text{ mit:}\\
\underline{iterg}(n, x, y) &= \underline{iterg}(n-1, y, (x+1) \cdot (y-1)),\ n \geq 2\\
\underline{iterg}(1, x, y) &= x
\end{aligned}
$$

Geben Sie für $g : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ eine (äquivalente) rekursive Definition an.

5. Aufgabe (Algebraisches Pfadproblem): (2 + 3 + 2 = 7 Punkte)

Der Graph G stellt ein Brückensystem auf einer Inselkette dar, die Knoten sind hierbei die einzelnen Inseln, die Kanten sind die verbindenden Brücken. Die Zahlen an den Kanten geben die maximale Tragkraft der jeweiligen Brücke in Tonnen an. Da die Brücken sehr schmal sind, dürfen sie ausschließlich in der angegebenen Richtung befahren werden. G ist durch folgende Kanten gegeben:

$(5, 3, 7), (5, 2, 3), (3, 2, 6), (3, 1, 5), (2, 1, 2), (2, 4, 4), (1, 4, 6)$

wobei die Notation wie folgt zu lesen ist: (Startknoten, Zielknoten, Tragkraft).

(a) Es sollen nun die maximalen Gewichte für Fahrzeuge berechnet werden, die zwischen beliebigen Knotenpaaren verkehren können. Um welches Pfadproblem handelt es sich? Stellen Sie G graphisch dar!

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Aho-Algorithmus die Matrizen $D_G^{(i)}$ für $0 \leq i \leq 4$. Sie brauchen dabei nur die zur vorherigen Matrix geänderten Elemente in der Form $(i, j, \text{neuer Wert})$ angeben. Geben Sie außerdem die Matrix der maximalen Gewichte D_G an.

(c) Die Brücke zwischen 3 und 1 stürzt eines Tages ein. Wie verändern sich die maximalen Fahrzeuglasten von Insel 5 aus? Was für Auswirkungen hat dies auf Fahrzeuge, die sich zum Zeitpunkt des Einsturzes auf dem Weg von Insel 5 nach Insel 4 befinden?

6. Aufgabe (Backtracking): (5 Punkte)

Ein Leiter einer Stadtführung möchte sich eine neue Route überlegen. Dazu hat er sich alle Sehenswürdigkeiten der Stadt (A bis F) aufgemalt und die möglichen Wege zwischen diesen Sehenswürdigkeiten eingezeichnet (Abbildung 1).

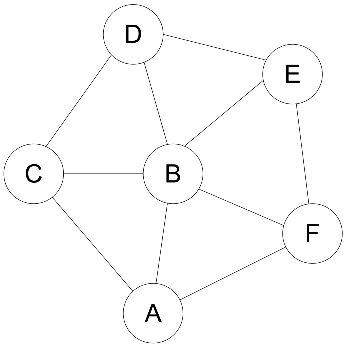

Abbildung 1: Sehenswürdigkeiten und die möglichen Wege dazwischen

Abbildung 2: optimierter Berechnungsbaum bis zur 1. Lösung

Nun sucht er mögliche Pfade durch den so entstandenen Graphen, welche am Startpunkt A beginnen und alle Sehenswürdigkeiten genau einmal besuchen. Außerdem soll am Ende der Führung wieder eine direkte Kante vom Endpunkt zurück zum Startpunkt A führen, wo sich die Reisegruppe trennt.

Eine Lösung hat der Reiseleiter auch schon gefunden (Abbildung 2): Der Weg (A, B, C, D, E, F) ist eine zulässige Lösung, da alle Knoten genau einmal besucht werden und da es auch eine Kante von F zurück nach A gibt.

Erweitern Sie nun den optimierten Berechnungsbaum aus Abbildung 2 bis zur vierten Lösung (finden Sie also noch 3 neue). Gehen Sie bei der Wegeerweiterung immer in der Reihenfolge A bis F vor, wenn es in einer Situation mehrere Wege gibt. Kennzeichnen Sie alle gefunden Lösungen, indem Sie den Endpunkt des Pfades umranden.

7. Aufgabe (Fixpunktsemantik): (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Sei $\mathcal{E} = (V, \Sigma, S, R)$ mit $V = \{S, A\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $R = \{\ S ::= (aSb \mid A),\ A ::= [\ cA\ ]\ \}$.

Berechnen Sie die syntaktischen Kategorien $W(\mathcal{E}, S)$ und $W(\mathcal{E}, A)$ mit Hilfe der Fixpunktsemantik. Gehen Sie dazu in den folgenden Schritten vor:

(a) Dokumentieren Sie mindestens 5 Iterationsschritte,

(b) geben Sie explizit $f^i(\perp)$ für $i \geq 1$ an (wobei f entsprechend der Vorlesung/Übung definiert ist),

(c) und schreiben Sie in Mengenschreibweise die Sprachen $W(\mathcal{E}, S)$ und $W(\mathcal{E}, A)$ auf.